21/11/16

Ένα σ-σύνολο θα λέγεται καλά διατεταγμένο αν κάθε υποσύνολο A του ~~E~~ έχει ελάχιστο στοιχείο.

Π.χ. • $\mathbb{N}$ → είναι καλά διατεταγμένο σύνολο
• $\mathbb{R}$ → δεν είναι γιατί υπάρχει το $(0,1)$ που δεν έχει ελάχιστο.
• $\mathbb{Z}$ δεν είναι
όμως $E = \mathbb{Z} \cap (-2016, +\infty) = [2015, +\infty)$ άρα είναι καλά διατεταγμένο.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ένα καλά διατεταγμένο σύνολο είναι και γραμμικά διατεταγμένο.

Απόδειξη: Αρκεί ν.δ.ο. $\forall x, y \in E$ είναι $x \leq y$ ή $y \leq x$

Για $x, y \in E$ $(x \neq y)$ θεωρώ το σύνολο $A = \{x, y\}$ επειδή E είναι καλά διατεταγμένο, το A έχει ελάχιστο στοιχείο.

Άρα αν $x = \min A$, τότε $x \leq y$
αν $y = \min A$, τότε $y \leq x$
Σε κάθε περίπτωση $x \leq y \vee y \leq x$

Πεπερασμένη επαγωγή: $\mathbb{N}$, ~~P(n)~~ $P(n)$ $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

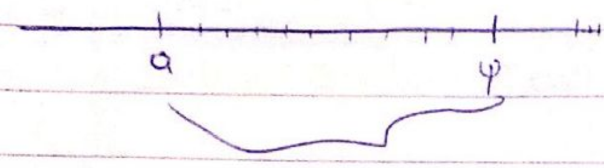
1ο βήμα: για $n > 1$

2ο βήμα: Έστω ισχύει για k

3ο βήμα: Ν.Δ.Ο. ισχύει για $k+1$

Θεώρημα (ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ ΕΠΑΓΩΓΗ):

E είναι καλά διατεταγμένο σύνολο με $a = \min E$ και $P(x)$ είναι ένας προτασιακός τύπος με $P(a) =$ αληθής, $x \in E$. Αν για ~~κάθε~~ οποιοδήποτε $\psi \in E$ ισχύει $P(x)$ αληθής για κάθε $x \leq \psi$, τότε η P είναι αληθής για όλα τα $x \in E$.



$P(a)$ αληθής εάν $P(x)$: αληθής
$\forall x \leq \psi$ τότε
$P(\psi)$ αληθής

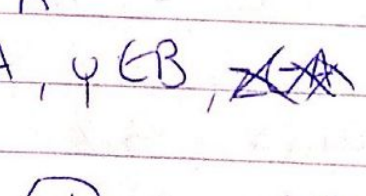
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός: Μια σχέση $f \subseteq A \times B$ καλείται συνάρτηση από το A στο B $[f: A \to B]$ αν

i) $P_f = A$

ii) $x \in A$, $\psi \in B$, $\cancel{z \in A}$ $xfz \wedge xf\psi \Rightarrow \psi = z$

π.χ. ①



Δεν είναι συνάρτηση

τα α, β ξεχωριστά

Επίσης αν $3 \to \alpha$ $3 \to \beta$
πάλι δεν είναι συνάρτηση

⊛ Συνάρτηση $f: A \to B$ — $\begin{cases} D_f = A \\ x f y \wedge x f z \Rightarrow y = z \end{cases}$ // $x F y : f(x) = y$

⊛ $f: A \to B$ επί : $[\{ y \ \exists x \in A : f(x) = y \} = B]$

⊛ $f: A \xrightarrow{1-1} B$ (αμφιμονοσήμαντη) $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

[ισοδύναμα
$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$]

Παράδειγμα: $f(x) = x^2$ (Όταν δεν γράφουμε πεδίο ορισ. ή σύνολο τιμών παίρνουμε το ευρύτερο δυνατό ($= \mathbb{R}$))
$x \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Δεν είναι επί (εκτός αν $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$)

Δεν είναι 1-1 ~~[illegible]~~

για $f: [-3, -9] \to \mathbb{R}$ είναι επί

αν $x, y \in [-3, -9]$ $f(x) = f(y)$
τότε $x^2 = y^2$
$(x+y)(x-y) = 0$
$x = y$ ή $x = -y$ $\Rightarrow x = y$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Η αντίστροφη σχέση f^{-1} μιας συνάρτησης $f: A \to B$ είναι συνάρτηση αν και μόνο αν η f είναι 1-1 και επί.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $(\Rightarrow)$ Έστω ότι η f^{-1} είναι συνάρτηση. Θα αποδείξω ότι η f είναι 1-1 και επί. Ας είναι $x, y \in A$ με $f(x) = f(y) = z \in B$ αρκεί ν.α.ο. $x = y$.

Είναι $f(x) = z \Rightarrow xfz \Rightarrow zf^{-1}x$

$f(y) = z \Rightarrow yfz \Rightarrow zf^{-1}y$ $\quad \overset{f^{-1} \text{ συνάρτηση}}{\Longrightarrow} x = y$

Η f είναι επί. Πράγματι, αν υποθέσαμε ότι $\exists y \in B$ με $y \notin R(f)$ ~~...~~ ώστε $f(x) \neq y$, $\forall x \in A$. Και συνεπώς ~~...~~ $(x,y) \notin f$ $\forall x \in A$, άρα $(y,x) \notin f^{-1}$

άτοπο!

Γιατί η f^{-1} είναι συνάρτηση.

ΠΟΡΙΣΜΑ: Αν $f: A \to B$ είναι 1-1 και επί τότε και η f^{-1} είναι 1-1 και επί.

ΑΣΚΗΣΗ: $f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$f(x,y) = 2^x(2y+1) - 1$. Να εξετάσετε αν η f είναι επί.

Ας είναι $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{N}^2$ ώστε $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$

$2^{x_1}(2y_1+1) - 1 = 2^{x_2}(2y_2+1) - 1$

$2^{x_1}(2y_1+1) = 2^{x_2}(2y_2+1)$

άρα και αυτός πρέπει να είναι περιττός $\quad 2^{(x_1 - x_2)}(2y_1+1) = 2y_2+1$ $\nearrow$ περ

$\Rightarrow x_1 = x_2 \wedge 2y_1 + 1 = 2y_2 + 1$

$x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$

Δηλ. $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$

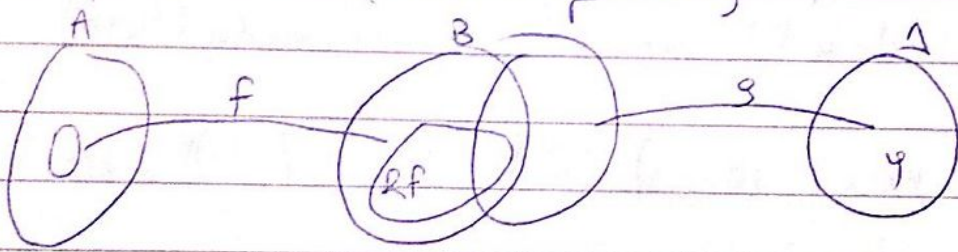
$\Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

④ ΣΥΝΘΕΣΗ. Ας είναι $f: A \to B$, $g: \Gamma \to \Delta$ δύο συναρτήσεις

Τότε το σύνολο $gof = \{(x,y) \in A \times \Delta : \exists z \in \Gamma : f(x) = z \wedge g(z) = y\}$
ορίζει μια συνάρτηση από το A στο Δ
(σύνθεση της g με την f)

Είναι: $D_{gof} = \{x \in A : f(x) \in D_g\}$
$(gof)(x) = g(f(x))$

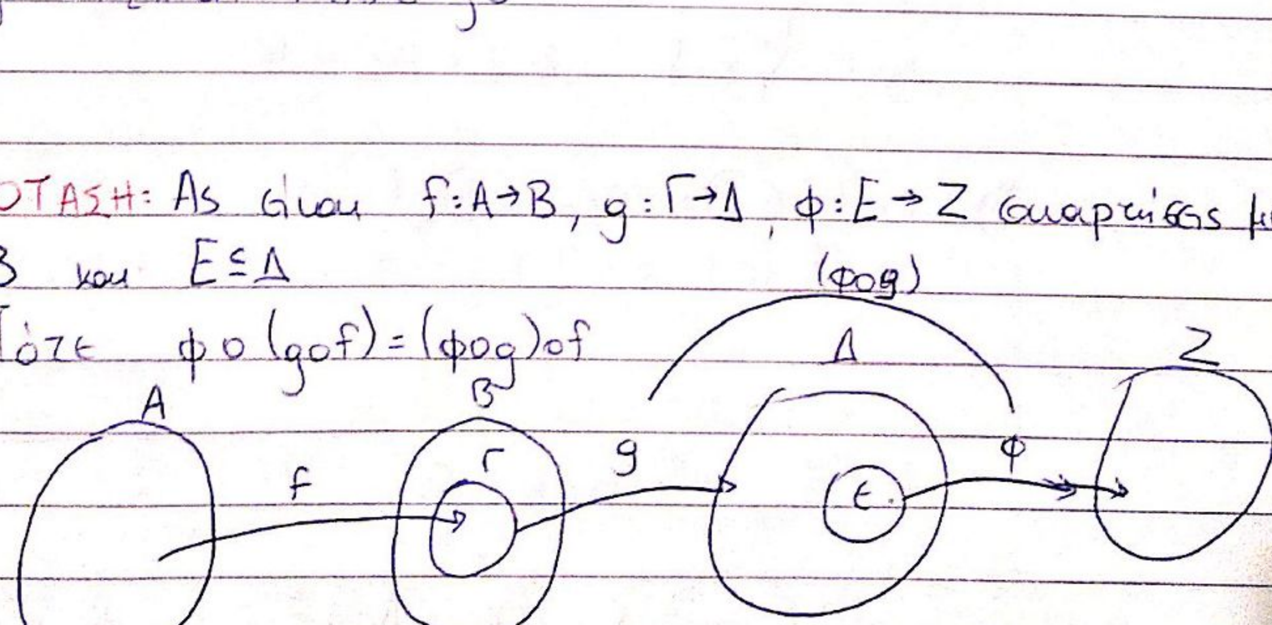
Παρατήρηση: Θα πρέπει $R(f) \cap D(g) \neq \emptyset$



* $D_{gof} = \{x \in A : f(x) \in D_g\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ας είναι $f: A \to B$, $g: \Gamma \to \Delta$, $\phi: E \to Z$ συναρτήσεις με
$\Gamma \subseteq B$ και $E \subseteq \Delta$

Τότε $\phi o (gof) = (\phi o g) o f$



Αποδ. Έχουμε:

$$D_{\phi\circ(g\circ f)} = \{x\in A : (g\circ f)(x)\in D_\phi\}$$
$$= \{x\in A : f(x)\in D_g \wedge (g\circ f)(x)\in D_\phi\}$$
$$= \{x\in A : f(x)\in D_g \wedge g(f(x))\in D_\phi\}$$
$$= \{x\in A : x\in D_f \wedge f(x)\in D_g \wedge g(f(x))\in D_\phi\}$$

$$D_{(\phi\circ g)\circ f} = \{x\in A : f(x)\in D_{\phi\circ g}\}$$
$$= \{x\in A : x\in D_f \wedge f(x)\in D_{\phi\circ g}\}$$
$$= \{x\in A : x\in D_f \wedge f(x)\in D_g \wedge g(f(x))\in D_g\} = D_{\phi\circ(g\circ f)}$$

Για $x\in D = D_{\phi\circ(g\circ f)} = D_{(\phi\circ g)\circ f}$ έχουμε

$$(\phi\circ(g\circ f))(x) = \phi((g\circ f)(x)) = \phi(g(f(x)))$$

και $((\phi\circ g)f(x)) = (\phi\circ g)(f(x)) = \phi(g(f(x)))$

άρα $((\phi\circ g)\circ f)(x) = (\phi\circ g\circ f))(x)\ \forall\, x\in D$

Παράδειγμα: $f(x) = x^2-5x+6 \quad x\in[-3,5]\to\mathbb{R}$

$g(x) = \sqrt{x-1}\ ,\ x\in[7,10]\to\mathbb{R}$

$$D_{g\circ f} = \{x\in D_f : f(x)\in D_g\}$$
$$= [x\in[-3,5] \wedge x^2-5x+6\in[7,10])$$

$$\boxed{\begin{array}{l} -3\le x\le 5 \\ 7\le x^2-5x+6\le 10 \end{array}}$$

$-3 \qquad 5$

$$0\le x^2-5x-1 \ \wedge\ x^2-5x-4\le 0$$

$$(g \circ f)(x) = g\,(f(x)) = \sqrt{f(x) - 1} = \sqrt{x^2 - 5x + 6 - 1} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 5x + 5} = (g \circ f)(x)$$